

ausführlicher
↑ auf p. 29-31

Beispiel:
(Kurz auf 29+31)

$$\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = ?$$

^a
-29-
 $t \gg 0$

1.) $\varphi(x, t) := \frac{x^t - 1}{\ln x}$

$0 \leq x \leq 1, \quad t \in [c, d]$ mit $c > 0$ zunächst

φ stetig auf $[0, 1] \times [c, d]$ (L'Hospital)

2.) $\frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx \stackrel{14.2}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{x^t - 1}{\ln x} dx$

$$= \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1} \quad \text{auf } [c, d]$$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \text{const} + \ln(1+t) \right|$$

auf $[c, d]$

c, d beliebig $\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \text{const} + \ln(1+t) \quad (*)$

$t > 0$

prüfe, ob alle Voraussetzungen von Satz 14.2 erfüllt sind!

3.) betrachte $t \downarrow 0$ in $(*)$, l.S. und r.S.

stetig in 0 $\implies \text{const} = 0$

Ergebnis:

$$\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \ln(1+t), \quad t \geq 0$$

↑ Details dazu: p. 29-31 ▽

→ dann weiter auf p. 32:

Frage: $\int_a^b \left(\int_c^d \dots \right) = \int_c^d \left(\int_a^b \dots \right) ?$

Beispiel :
(gekürzt: vgl. p. 29^{a,b})

$$\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = ?$$

für $t \geq 0$

1.) $f(x, t) := \frac{x^t - 1}{\ln x}$ ist für jedes $t \geq 0$

zunächst nur auf $(0, 1)$ erklärt,

allerdings kann man $x \mapsto f(x, t)$
stetig in $x = 0$ und $x = 1$ fortsetzen

(Wert 0 in $x = 0$; Wert ~~t~~ in $x = 1$
mit $\mathcal{L}'$ Hospital)

$\Rightarrow$ Vor i) aus Satz 14.2 ist erfüllt,

wenn man für D zunächst ein Intervall
 $[c, d]$ mit $c > 0$ wählt.

(dann ist $f \in C^0([0, 1] \times [c, d])$) sicherheits-
halber

2.) Sei $t \in [c, d]$ und $x \in (0, 1]$

Formel
 $\Rightarrow$
 für f

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\ln x} \frac{\partial}{\partial t} \{ e^{t \ln x} - 1 \}$$

$$= x^t$$

außerdem: $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$, da $f(0, \cdot) = 0$

Zusammen: $\frac{\partial f}{\partial t} \in C^0([0, 1] \times [c, d])$, d.h.

Vor ii) aus Satz 14.2 ist erfüllt.

3.) aus 1) u. 2.) folgt mit 14.2:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx}_{=: F(t)} = \int_0^1 x^t dx \quad \forall t \in [c, d]$$

$$\Rightarrow F(t) = \left(\frac{1}{t+1} x^{t+1} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{t+1}$$

$$\Rightarrow F(t) = \ln(1+t) + \text{const} \quad \text{auf } [c, d]$$

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ c, d \text{ beliebig} \end{array} \quad \boxed{(*) \quad F(t) = \ln(1+t) + \text{const} \quad \text{auf } \mathbb{R}^+}$$

4.) Bestimmung von "const":

$$f \text{ stetig auf z.B. } [0, 1] \times [0, 1] \xRightarrow{14.1}$$

$$F \text{ stetig auf } [0, 1]$$

Linke u. rechte Seite von $(*)$ sind also stetig in 0, d.h. $(*)$ gilt auch für $t = 0$.

$$\text{Wegen } F(0) = 0 \text{ folgt } \text{const} = 0,$$

insgesamt:

$$\int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx = \ln(1+t), \quad t \geq 0.$$

□

Nun zur Vertauschung der Integrationsgrenzen

Satz 14.3: Sei $f \in C^0([a,b] \times [c,d])$.

Dann gilt:

$$(*) \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x,t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t) dx \right) dt.$$

Beweis: Satz 14.1 $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \mapsto \int_a^b f(x,t) dx \text{ stetig auf } [c,d] \\ x \mapsto \int_c^d f(x,t) dt \text{ stetig auf } [a,b] \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ beide Doppelintegrale aus (*) existieren

Wie zeigt man " $=$ "? Versuch mit
der Def. von $\int \dots$ ist umständlich!

anderes Argument: Setze wie bisher

$$F(t) := \int_a^b f(x, \underline{t}) dx, \quad c \leq t \leq d,$$

sowie

$$G(y) := \int_c^y F(t) dt, \quad y \in [c, d],$$

$$L(y) := \int_a^b \underbrace{\left\{ \int_c^y f(x, t) dt \right\}}_{=: g(x, y)} dx, \quad y \in [c, d]$$

Zu zeigen:

$$G(d) = L(d)$$

Dazu zeige $G = L$ auf $[c, d]$!

Offenbar ist

$$G(c) = 0 = L(c) \quad (**)$$

Nun berechne G' und L' :

$$\underline{\text{Satz 14.1}} \implies \overline{f} \in C^0([c, d])$$

$$\implies G \in C^1([c, d]), \quad G' = \overline{f};$$

Hauptsatz

$$\underline{\text{Satz 14.2}} \implies L'(y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) dx$$

Def von $\overline{f}$

$$= \int_a^b f(x, y) dx = \overline{f}(y);$$

Hauptsatz

Zusammen: $G' = L' \text{ auf } [c, d]$

Mit $(**) \text{ folgt } G = L.$



Parameter-abhängige uneigentliche Integrale

Modellfall: $t \mapsto \int_a^\infty f(x, t) dx$

mit eigentlicher Grenze a

Prinzip: „alles“ geht wie vorher, falls
 die Konvergenz der uneigentlichen Integrale
gleichmäßig in t ist. Genaues:

Def 14.1: Sei $a \in \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}$.

Für alle $t \in D$ und alle $u \in (a, \infty)$

sei

$$f(\cdot, t) \in \mathcal{R}([a, u])$$

$$\left(\Rightarrow \int_a^u f(x, t) dx \text{ existiert für alle } t, u \right)$$

Gibt es dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $u_\varepsilon > a$

mit

$$(*) \quad \left| \int_{u_1}^{u_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon$$

für alle

$$u_2 > u_1 > u_\varepsilon \text{ und alle } t \in D,$$

so heißt $\int_a^\infty f(x, t) dx$ gleichmäßig
bzgl. $t \in D$ konvergent.

Bem: 1.) Bei festem t sagt $\textcircled{*}$

genau, dass für $u \mapsto \int_a^u f(x, t) dx$

die Cauchy-Bedingung im Fall $u \rightarrow \infty$

erfüllt ist. Also existiert per $\mathcal{Qd.}$

$\int_a^\infty f(x, t) dx$. Zusätzlich wird gleich-
mäßigkeit bzgl. $t \in D$ verlangt.

2.) Hinreichendes Kriterium:

$\exists g \in \mathcal{R}([a, \infty))$: $|f(x, t)| \leq g(x)$, $\int_a^\infty g(x) dx < \infty$

Beispiel : Für festes $a > 0$ sind die

Integrale $\int_a^{\infty} e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx, \int_a^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$

gleichmäßig konvergent bzgl. $t \geq 0$.

(bei " $\frac{\sin x}{x}$ " kann man sogar $a = 0$ zulassen, da $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ bei $x \rightarrow 0$)

Beweis: Seien $0 < a < u_1 < u_2$.

Wir rechnen Komplex:

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \left(\frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x} \right) dx =$$

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{x} e^{-tx} e^{ix} dx =$$

$$u_2 \int_{u_1} \frac{1}{x} e^{(-t+i)x} dx \stackrel{\text{part Int.}}{=} \quad$$

$$\left[\frac{1}{-t+i} e^{(-t+i)x} \cdot \frac{1}{x} \right]_{u_1}^{u_2} + \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{(-t+i)x}}{x^2} dx$$

$\downarrow$ $\left(\frac{1}{-t+i} \right)$

$$=: A+B.$$

Beachte: 1.) $|-t+i| = \sqrt{t^2+1} \gg 1$

sowie $|e^{(-t+i)x}| = e^{-tx} \leq 1$

$$\Rightarrow |A| \leq \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} ;$$

$$2.) |B| \leq \int_{u_1}^{u_2} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}$$

Zusammen:

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \frac{1}{x} (\cos x + i \sin x) dx \right|$$

$$\leq 2/u_1$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $u_\varepsilon := 2/\varepsilon$. Für $u_2 > u_1 > u_\varepsilon$ folgt dann durch Übergang zu

Re und Im

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx \right|, \left| \int_{u_1}^{u_2} e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx \right| < \varepsilon.$$



Man bekommt in Ergänzung zu 14.1:

Satz 14.4: (Stetigkeit)

Sei $f \in C^0([a, \infty) \times [c, d])$.

Sind die Integrale $\int_a^\infty f(x, t) dx$

gleichmäßig konvergent bzgl. t, so

-40-

ist $F: t \mapsto \int_a^\infty f(x, t) dx$ stetig auf $[c, d]$.

Beweisidee: Sei $u > a$. Für $t_1, t_2 \in [c, d]$ ist

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &= \left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_u^\infty f(x, t_1) dx - \int_u^\infty f(x, t_2) dx \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right| + \\ &\left| \int_u^\infty f(x, t_1) dx - \int_u^\infty f(x, t_2) dx \right|. \end{aligned}$$

Je $\varepsilon > 0$ gegeben, so findet man ein u mit

$$\left| \int_u^\infty f(x, t) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall t \in [c, d]$$

(benutze Def. 14.1 !)

Damit ist u fixiert, den verbleibenden Term
kann man wie in 14.1 behandeln:

$\exists \delta = \delta(u, \varepsilon)$ mit

$$\left| \int_a^u f(x, t_1) dx - \int_a^u f(x, t_2) dx \right| \leq \varepsilon/3$$

$$\forall t_1, t_2 \in [c, d], |t_1 - t_2| \leq \delta.$$

□

Satz 14.5: (Vertauschbarkeit)

Unter den Voraussetzungen von 14.4

existiert

mit Wert

$$\int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx$$

$$\int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt.$$

Beweisidee:
$$S_n: F(t) := \int_a^\infty f(x, t) dx$$

Zu zeigen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^n \left(\int_c^d f(x, t) dx - \int_c^d F(t) dt \right) \right| = 0.$$

Es gilt:

$$\left| \int_a^n \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx - \int_c^d F(t) dt \right| \stackrel{14.3}{=} 0$$

$$\left| \int_c^d \left(\int_a^n f(x, t) dx \right) dt - \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt \right|$$

$$\leq \sup_{c \leq t \leq d} \left| \int_a^\infty f(x, t) dx - \int_a^n f(x, t) dx \right| \cdot (d-c)$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ wegen der Vorausgesetzten glm.

Konvergenz von $\int_a^\infty f(x, t) dx$ bzgl. t



Bspl.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$$

-43-

Beweis: „Anbringen eines Parameters“ //

$$\begin{cases} f(x,t) := e^{-x} \cos(tx), & x \in [0, \infty), \\ 0 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

glm. Konvergenz von $\int_0^{\infty} f(x,t) dx$ bzgl. t

wegen $|f(x,t)| \leq e^{-x}$, $\int_0^{\infty} e^{-x} dx < \infty$;

14.5 $\Rightarrow$ (*)
$$\int_0^1 \left(\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(tx) dx \right) dt =$$
$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^1 e^{-x} \cos(tx) dt \right) dx;$$

r. S. von (*)
$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \cos(tx) dt \right) e^{-x} dx =$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x} \sin(tx) \right] \Big|_{t=0}^{t=1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx \quad \leftarrow \text{Ausgangsintegral}$$

links in (*) beachte:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(tx) dx =$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-x} \cdot \cos(tx) dx = \quad \leftarrow \text{part. Int.}$$

$$- \left[e^{-x} \cdot \cos(tx) \right] \Big|_{x=0}^{x=\infty} - t \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(tx) dx$$

$$= 1 - t \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(tx) dx$$

$$1 - t \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(tx) dx$$

part. Int.

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(tx) dx = \frac{1}{1+t^2}$$

Also: l.S. von (*) = $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

Vergleich $\Rightarrow$ Beh.

3. Vor
Termin

Zum Schluss

Satz 14.6 : (Differenzierbarkeit)

Für $f \in C^0([a, \infty) \times [c, d])$ gelte:

i) $\frac{\partial f}{\partial t} \in C^0([a, \infty) \times [c, d])$

ii) $\int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ glm. konvergiert

bzgl. $t \in [c, d]$

iii) $\int_a^{\infty} f(x, c) dx$ existiert